

2.1. Математика

2.1.1. Характеристика целей и объектов контроля

Назначение экзаменационной работы состоит в оценке уровня общеобразовательной подготовки по математике учащихся IX классов общеобразовательных учреждений в целях их государственной (итоговой) аттестации. Результаты выполнения экзаменационной работы выпускниками основной школы, могут быть использованы при приеме учащихся в профильные классы средней школы, а также в учреждения начального профессионального и среднего профессионального образования.

Содержание и структура экзаменационной работы предусматривают проверку наличия у учащихся *базовой математической компетентности* (часть 1) и *математической подготовки повышенного уровня*, достаточной для активного использования полученных знаний при изучении математики и смежных предметов в старших классах на профильном уровне (часть 2). Основное функциональное назначение заданий части 2 – дифференцировать хорошо успевающих школьников по уровням подготовки, выявить наиболее подготовленную часть выпускников, составляющую потенциальный контингент профильных классов.

Объектами контроля в заданиях части 1 работы являются: знание и понимание ключевых элементов содержания (математических понятий, их свойств, математической символики и средств наглядности и проч.), владение основными алгоритмами, умение решать несложные математические проблемы, не сводящиеся к прямому применению алгоритма, умение применять математические знания в несложных практических ситуациях.

Объекты контроля в заданиях части 2 характеризуют повышенный уровень математической подготовки выпускников основной школы. Это умение интегрировать знания из различных тем курса при решении задач комбинированного характера, владение некоторыми специальными приемами решения задач, умение строить и исследовать простейшие математические модели, использовать разнообразные способы рассуждений при исследовании математических ситуаций, умение математически грамотно и ясно записывать решение, приводя при этом необходимые пояснения и обоснования.

Проверка перечисленных качеств математической подготовки осуществляется на базе основного содержания курса V–IX классов и связана с контролем уровня сформированности предметных умений. Это умение применять эквивалентные формы записи рациональных чисел; выполнять прикидку и оценку результатов вычислений, вычисления с рациональными числами и квадратными корнями в ходе решения различных задач; выполнять преобразования алгебраических выражений; решать уравнения, неравенства и их системы; строить и читать графики функций, применять графические представления при решении уравнений, систем уравнений, неравенств; работать со статистической информацией, представленной в различных формах, находить средние ряда данных, находить частоту и вероятность случайного события.

2.1.2. Краткая характеристика КИМ ГИА-9 2011 года по математике

Экзаменационная работа 2011 г. отличается от работ предыдущих лет наличием в ее части 1 дополнительно 2-х заданий по теме «Вероятность и статистика». Таким образом, часть 1 работы, нацеленная на проверку овладения курсом на базовом уровне, содержала 18 заданий (вместо прежних 16-ти). Усвоение материала новой содержательной линии проверялось в 2011 г. только на базовом уровне, в часть 2 работы соответствующие задания не включались. Общее число заданий работы увеличено за счет части 1 на 2 и составляет 23 задания. Необходимо отметить, что в качестве переходной меры критерии оценивания не были изменены, несмотря на увеличение объема работы.

Содержание экзамена 2011 г. регламентируется документом «Федеральный компонент государственного стандарта общего образования. Математика. Основное общее образование» (приказ Минобрнауки России от 05.03.2004 № 1089 «Об утверждении фе-

дерального компонента государственных образовательных стандартов общего, основного общего и среднего (полного) общего образования»).

Как и в предыдущие годы, экзаменационная работа 2011 г. состоит из двух частей. Задания части 1 в совокупности охватывают все разделы курса и предусматривают три формы ответа: задания с выбором одного ответа из четырех предложенных вариантов, задания с кратким ответом, задание на соотнесение элементов двух множеств. При выполнении заданий части 1 учащиеся должны продемонстрировать определенную системность знаний и широту представлений. Содержание этой части не ограничивается проверкой владения основными алгоритмами. Значительный акцент в ней делается на идейно-понятийной и практической составляющих.

Каждое задание части 1 характеризуется четырьмя параметрами: содержание, категория познавательной области, уровень трудности, форма ответа.

В части 1 экзаменационной работы 2011 г. содержатся задания по следующим разделам *содержания* курса основной школы: *числа, буквенные выражения, преобразования алгебраических выражений, уравнения, неравенства, последовательности и прогрессии, функции и графики, элементы статистики и теории вероятностей*.

Число заданий по каждому из указанных разделов инвариантно для всех используемых планов экзаменационных работ. Содержание и структура части 1 работы обеспечивают ее репрезентативность, полноту проверки подготовки выпускников на базовом уровне.

По *категориям познавательной области* каждое задание части 1 экзаменационной работы соотносится с одной из четырех категорий познавательной области: *знание / понимание, умение применить алгоритм* (далее – алгоритм), *умение применить знания для решения математической задачи* (далее – решение задачи), *применение знаний в практической ситуации* (далее – практическое применение).

Ниже приводится характеристика каждой из выделенных категорий применительно к базовому уровню подготовки.

Знание / понимание: владение термином; владение различными эквивалентными представлениями (например, числа); распознавание (на основе определений, известных свойств, сформированных представлений); использование различных математических языков (символического, графического, вербального), переход от одного языка к другому; интерпретация.

Алгоритм: использование формулы как алгоритма вычислений; применение основных правил действий с числами, алгебраическими выражениями; решение основных типов уравнений, неравенств, систем.

Решение задачи: умение решить математическую задачу, предполагающую применение системы знаний, включение известных понятий, приемов и способов решения в новые связи и отношения, распознавание стандартной задачи в измененной формулировке.

Практическое применение: умение выполнять задания, соответствующие одной из первых трех категорий данного списка, формулировка которых содержит практический контекст, знакомый учащимся или близкий их жизненному опыту.

Ориентировочная доля заданий, соответствующих каждой познавательной категории следующая: знание / понимание – 5 заданий, алгоритм – 6 заданий, решение задачи – 4 задания, практическое применение – 3 задания.

Планируемые *показатели трудности* заданий части 1 работы (предполагаемый процент верных ответов) находятся в диапазоне от 60 до 90%. По уровню трудности задания распределяются следующим образом: 9 заданий уровня 80–90% (95%), 5 заданий уровня 70–80% и 4 задания уровня 60–70%. Такое соотношение позволяет реализовать принцип реалистичности экзаменационной работы.

Часть 2 направлена на проверку владения материалом на повышенном и высоком уровнях. Эта часть содержит 5 заданий из различных разделов курса, требующих развернутого ответа. Задания в части 2 расположены по нарастанию трудности – от относитель-

но простых до достаточно трудных, предполагающих свободное владение материалом и высокий уровень математического развития.

В 2011 г. в части 2 КИМ были представлены следующие разделы содержания: *выражения и их преобразования, уравнения, неравенства, текстовые задачи, координаты и графики, последовательности и прогрессии*.

Фактически в части 2 работы представлены задания трех разных уровней. Первое (задание № 19 в экзаменационной работе) самое простое. Как правило, оно направлено на проверку владения формально-оперативными навыками: преобразование выражения, решение уравнения, неравенства, системы, построение графика. По уровню сложности это задание лишь немногим превышает обязательный уровень. Планируемый уровень трудности этого задания составляет 40–60%. В 2011 г. задания относились к разделам *выражения и их преобразования, уравнения*.

Следующие два задания (№ 20 и № 21) более высокого уровня, они труднее первого и в техническом, и в логическом отношении, при их выполнении часто приходится интегрировать знания из различных разделов курса, т. е. они, как правило, имеют комплексный характер. Их планируемый уровень трудности – 20–40%. При хорошем выполнении части 1 правильное решение этих заданий уже обеспечивает получение «пятерки». В 2011 г. здесь были представлены задания из разделов: *неравенства, арифметическая и геометрическая прогрессии*.

И, наконец, последние два задания (№ 22 и № 23) наиболее трудные, они требуют свободного владения материалом и довольно высокого уровня математического развития. Их планируемый уровень трудности – менее 20%. Рассчитаны эти задачи на выпускников, изучавших математику более основательно, чем в рамках пятичасового курса, например, в рамках углубленного курса математики, элективных курсов в ходе предпрофильной подготовки, в математических кружках и проч. Хотя эти задания не выходят за рамки содержания, предусмотренного Федеральным компонентом государственного образовательного стандарта основной школы, при их выполнении выпускник имеет возможность продемонстрировать владение довольно широким набором некоторых специальных приемов (выполнения преобразований, решения уравнений, систем уравнений), проявить некоторые элементарные умения исследовательского характера. В 2011 г. задания № 22 и № 23 относились к разделам: *координаты и графики, текстовые задачи*.

2.1.3. Основные результаты ГИА-9 2011 года по математике

Анализ результатов экзамена проводится на основе данных базовых регионов РФ. Общая численность выборки составляет более 200 тыс. учащихся.

Оценивание результатов выполнения работ выпускниками в 2011 г., как и в предыдущие годы, осуществлялось с помощью двух количественных показателей: традиционной отметки и общего балла, назначение которого – расширение диапазона традиционных отметок. Принципиальной позицией является наличие минимального проходного критерия: чтобы получить положительную отметку, выпускник должен был выполнить не менее 8-ми заданий части 1 работы.

Подходы к начислению баллов за выполнение заданий части 1 и части 2 не отличаются от принятых в предшествующем году. За каждое верно решенное задание *части 1* учащемуся начислялся 1 балл. За верное выполнение заданий *части 2* – 2 балла (задание № 19), 3 балла (задания № 20 и № 21) и 4 балла (задания № 22 и № 22).

Общий балл формируется путем суммирования баллов, полученных учащимся за выполнение частей 1 и 2 работы. В итоге за часть 1 максимально можно получить 18 баллов, за часть 2 – 16 баллов, за работу в целом – 34 балла. Задание части 2 оценивается максимальным баллом, если учащийся выбрал правильный путь решения, из письменной записи решения понятен ход его рассуждений, получен верный ответ. Если в решении допущена ошибка, не имеющая принципиального характера и не влияющая на общую пра-

вильность хода решения, то учащемуся засчитывается балл, на 1 меньше максимального. Другие возможности не предусматриваются.

Основное назначение общего балла – повышение информативности традиционной отметки, расширение диапазона отметок «4» и «5» и более детальная их дифференциация. Он связан с отметкой по пятибалльной шкале следующим образом: менее 8 баллов за часть 1 работы – отметка «2»; от 8 до 14 баллов – отметка «3»; от 15 до 21 балла – отметка «4»; от 22 до 34 баллов – отметка «5». В табл. 1.1 приведены данные об отметках по пятибалльной шкале и на рисунке 1.1 - гистограмма распределения общего балла.

Таблица 1.1. Распределение отметок по пятибалльной шкале

Аттестационная отметка	Число учащихся	Процент учащихся
«2»	20 343	10
«3»	59 639	30
«4»	77 257	38
«5»	45 190	22

Эти данные получены в ходе статистической обработки результатов выборки участников экзамена из базовых регионов и могут расходиться с данными, имеющимися в территориях. Следует также учитывать, что разброс по каждой из отметок по территориям значительно различается.

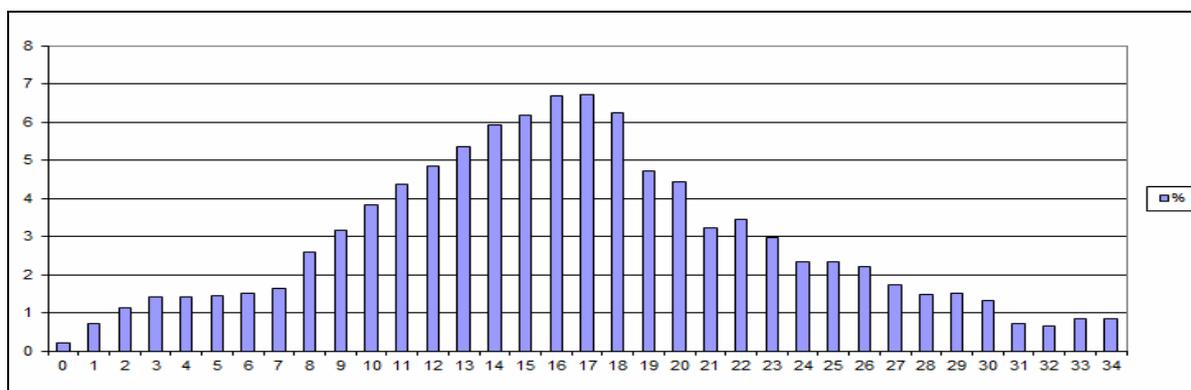


Рис. 1.1. Распределение баллов (максимальный балл – 34)

Введение общего балла позволяет использовать больше градаций для характеристики подготовки успевающих учащихся. Так, примерно две трети выпускников, получивших отметку «4» (или 26% от общего числа выпускников), имеют 15–18 баллов. Это «минимальная четверка», характеризующая в основном подготовку тех учащихся, которые или ограничились выполнением заданий только части 1 (от 15 до 18 заданий), или выполнили еще одно несложное задание из части 2. В то же время можно выделить достаточно большую группу сильных «четверочников», получивших от 19 до 21 балла; их уровень подготовки можно считать близким к «пятерке». У них сформированы базовые знания и умения, и они способны решать стандартные задачи повышенного уровня. Как и в предшествующие годы, это примерно треть получивших отметку «4» (12% от общего числа выпускников).

Выпускники, получившие отметку «5», естественным образом подразделяются на три группы. Немногим больше половины таких школьников (11% от общего числа учащихся) имеют «минимальную пятерку» с общим баллом от 22 до 26. Эти учащиеся в полной мере владеют базовыми знаниями и умениями и демонстрируют умение решать задачи повышенного уровня из различных разделов курса. «Пятерку» с высоким рейтингом – от 27 до 30 баллов – имеют примерно треть «пятерочников» (6% от общего числа выпускников). Это учащиеся, которые показали свободное владение материалом на базовом уровне, умение находить пути решения задач в ситуациях, отличающихся от стандартных. Они решили хотя бы одну задачу высокого уровня. И наконец, «пятерку» с очень высоким

баллом, от 31 до 34, получили около 3% учащихся. Это те девятиклассники, которые справились полностью или с небольшими недочетами со всей работой. Они свободно владеют материалом курса и уверенно выполняют задания, требующие нестандартных подходов и определенных исследовательских навыков. Их отличает также умение при решении задачи ясно и в последовательной логике изложить свои рассуждения.

2.1.4. Анализ результатов выполнения заданий экзаменационной работы

Результаты выполнения заданий части I работы

Ниже приведены результаты выполнения заданий по содержательным блокам, включаемым в проверку на базовом уровне. В таблицах приводится средний процент выполнения конкретных заданий.

Таблица 1.2. Числа

№	Содержание задания	Познавательная категория	Выполнили верно, %
1	Запись числа в стандартном виде: – запись больших чисел с помощью множителя – степени 10	практическое применение знание / понимание	77
	– запись малых чисел с помощью множителя – степени 10		91
2	Задача на проценты, выражение десятичной дроби в процентах	практическое применение	80
3	Квадратный корень. Сравнение действительных чисел: – оценка квадратного корня, определение его положения на координатной прямой;	знание / понимание	91
	– оценка квадратного корня целыми числами		93

Результаты выполнения заданий, связанных с числовой линией курса, вполне удовлетворительные. Выпускники продемонстрировали хорошее понимание записи чисел в эквивалентных формах. Однако труднее, как это бывает обычно, оказалось задание с практической фабулой, в котором расстояние, записанное в «млн км», надо было выразить в километрах, представив полученную величину в стандартном виде. Не выручило и то, что задание было с выбором ответа и фактически требовало только определить порядок числа. По второму заданию на эту же тему, но более формальному и не содержащему контекста, получен лучший результат. Это говорит о том, что знания многих учащихся имеют достаточно формальный характер.

В задании на проценты учащиеся должны были в рамках несложной фабулы перейти от десятичных дробей к процентам. Приведем пример задания для одного из вариантов.

Задание 1. Численность птиц, гнездящихся в заповеднике, составила 0,9 числа птиц, гнездившихся там 10 лет назад. На сколько процентов уменьшилась численность птиц, гнездящихся в заповеднике, за 10 лет?

1) на 1% 2) на 9% 3) на 90% 4) на 10%

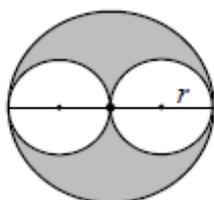
Абсолютное большинство учащихся правильно ответили на вопрос, показав хорошее понимание понятия процента и связи процентов с десятичными дробями. Ошибки, допущенные при решении этой задачи, были связаны с тем, что учащиеся неправильно определяли, какую часть величины надо выразить в процентах, и выбирали ответ 3.

Таблица 1.3. Выражения. Преобразования выражений

№	Содержание задания	Познавательная категория	Выполнили верно, %
1	Буквенные выражения. Допустимые значения переменных, входящих в алгебраические выражения	знание / понимание	78
2	Нахождение значения буквенного выражения	алгоритм	87
3	Составление буквенного выражения для вычисления площади фигуры	решение задачи	57–65
4	Преобразование целых выражений	алгоритм	84–86
5	Действия с алгебраическими дробями	алгоритм	76–81
6	Преобразование выражений, содержащих степени с целым показателем	алгоритм	70–87

Наибольшую трудность вызвало задание с геометрическим содержанием на составление буквенного выражения. Приведем пример одного из вариантов задания.

Задание 2. Чему равна площадь заштрихованной части круга? (Составьте выражение и упростите его.)



Алгебраические задачи с геометрическим содержанием, которые включаются в экзаменационную работу последние три года, вызывают у учащихся значительные трудности. С этой задачей справились 65% учащихся. Для ее решения требовалось лишь знать формулу площади круга и определить по рисунку радиус большого круга. Однако более трети школьников не справились с этой задачей. Еще ниже результат по аналогичной задаче, в которой учащиеся имели дело с фигурой, составленной из прямоугольников. Хотя прямоугольник – более «простая» фигура, но задача отличалась от приведенной тем, что для ее решения надо было найти способ разбиения фигуры на прямоугольники или дополнения ее до прямоугольника, и это явилось дополнительной трудностью (57% верных ответов).

Анализируя данные таблицы, необходимо обратить внимание еще на два момента: разницу в выполнении двух заданий на действия с алгебраическими дробями и двух заданий на преобразование степеней с целым показателем. С делением алгебраических дробей выпускники справляются хуже, чем с умножением. Что касается степеней, то «двухшаговое» задание, в котором требовалось преобразовать выражение и затем найти его значение при заданном значении переменной, вызвало больше трудностей, чем «одношаговое», включающее только преобразование, хотя и с буквенными показателями. Это еще раз подтверждает выявленный в предыдущие годы недочет в подготовке школьников – добавление каждого, пусть и небольшого шага, приводит к снижению результата.

Таблица 1.4. Уравнения. Неравенства

№	Содержание задания	Познавательная категория	Выполнили верно, %
1	Решение квадратного уравнения: – полного – вида $ax^2 + bx = 0$	алгоритм	76 79
2	Понимание графической интерпретации системы двух уравнений с двумя переменными:	знание / понимание	

	– определение числа решений системы		70
	– нахождение решений системы по готовому рисунку		68
3	Составление уравнения по условию текстовой задачи	решение задачи	47–75
4	Решение линейного неравенства с одной переменной	алгоритм	66
5	Решение системы двух линейных неравенств с одной переменной	алгоритм	65
6	Решение квадратного неравенства	знание / понимание	80
7	Решение квадратного неравенства с опорой на готовый график	знание / понимание	75

Результаты выполнения заданий этих блоков ниже, чем других. Даже при решении стандартных квадратных уравнений (полных или неполных) до четверти учащихся допускают ошибки.

Оба задания на понимание графической интерпретации решения системы двух уравнений с двумя переменными не были связаны с выполнением каких-либо вычислений или преобразований, они были направлены на проверку понимания сути проблемы. Результаты выполнения этих заданий практически одинаковы. Около 70% девятиклассников в разных ситуациях проявили понимание идеи графической иллюстрации решения системы двух уравнений с двумя переменными. Первое из этих заданий предлагалось и в вариантах 2010 г., когда по нему был получен такой же результат. Вместе с тем у 30% учащихся не сформированы важнейшие представления о графической интерпретации решения уравнений и систем уравнений. Учитывая «устный» характер решения, следует признать, что эта цифра достаточно велика. Все эти школьники могут испытывать серьезные затруднения при изучении элементов математического анализа в старших классах.

Традиционно невысокие результаты показали девятиклассники при составлении уравнения по условию несложных стандартных текстовых задач. В вариантах КИМ предлагалась практически одна и та же простейшая задача на движение (в разных вариациях). Но в одном случае учащимся надо было самостоятельно записать уравнение, а в другом – выбрать соответствующее уравнение из четырех предложенных. Именно этим объясняется такая большая разница в результатах выполнения. Опыт показывает, что задание на составление уравнения по условию текстовой задачи с кратким ответом просто пропускается значительной частью школьников.

Объектами контроля по теме «Неравенства» являлись умения: решить несложное линейное неравенство или систему двух линейных неравенств, распознать квадратное неравенство вида $x^2 + c > 0$ или $x^2 + c < 0$ с заданным множеством решений, решить квадратное неравенство по готовому рисунку.

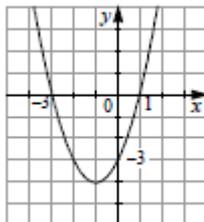
Как видно из приведенной таблицы, серьезная проблема возникла с решением линейного неравенства и системы линейных неравенств (66% и 65% соответственно). В первом случае требовалось решить неравенство типа $3 - x < 1 - 7(x + 1)$, во втором – систему

типа
$$\begin{cases} 3x + 14 < 2, \\ 2x + 1 < 0. \end{cases}$$
 Второй результат является традиционным – учащиеся затрудняются на

последнем шаге, определении множества решений системы на основе найденных множеств решений каждого из неравенств. Результат решения линейного неравенства, по-видимому, можно объяснить особенностями регионов, в которых использовались соответствующие варианты, так как он резко отличается от результатов выполнения аналогичных заданий в предыдущие годы. Что касается ошибок, то они очевидны: в преобразованиях, при решении полученного неравенства вида $ax < b$ ($ax > b$), при записи ответа (например, ответ записан с помощью обозначения числового промежутка и использована не та скобка, которая требуется).

Как уже многократно подтверждалось результатами экзамена, графический метод решения квадратных неравенств, является наглядным и понятным для учащихся. Приведем пример одного из вариантов заданий.

Задание 3. На рисунке изображен график функции $y = x^2 + 2x - 3$.



Используя график, решите неравенство $x^2 + 2x - 3 < 0$.

Правильно выполнили это задание 75% выпускников, что свидетельствует о понимании графической интерпретации решения неравенства с одной переменной. Хорошие результаты получены также по заданию, в котором надо было из четырех предложенных неравенств, например $x^2 + 9 < 0$, $x^2 - 9 < 0$, $x^2 - 9 > 0$, $x^2 + 9 > 0$, выбрать то, решением которого является любое число (или неравенство, не имеющее решений). Надо отметить, что здесь не требовалось вычислительной работы, ответить на вопрос можно было или опираясь на представления о положении графика функции вида $y = x^2 + c$ в координатной плоскости или анализируя выражения в левой части неравенств.

Таблица 1.5. Функции. Последовательности.

№	Содержание задания	Познавательная категория	Выполнили верно, %
1.	Соотнесение графика линейной функции с формулой	решение задачи	72
2.	Вычисление значения функции, заданной формулой	алгоритм	63
3.	Чтение графика реальной зависимости	практическое применение	80
4.	Работа с арифметической или геометрической прогрессиями, заданными рекуррентно	знание / понимание	86
5.	Понятие последовательности, вычисление члена последовательности с заданным номером	знание / понимание	58

В разделе «Функции» проблемы у учащихся возникли при выполнении задания, в котором требовалось найти и сравнить два значения функции, заданной формулой. Около 40% выпускников IX класса не смогли справиться с такой задачей. Это, безусловно, базовое умение, отрабатываемое в любом учебнике и необходимое для изучения функций как в основной школе, так и в дальнейшем, в старших классах. Причины низких результатов следует исследовать отдельно. Но предположительно одной из них может являться формальный подход к подготовке к экзамену, заключающийся не в повторении и систематизации знаний, полученных в ходе изучения курса математики, а в простом многократном решении заданий, предлагавшихся на экзаменах в предыдущие годы.

По разделу «Последовательности и прогрессии» результаты выполнения заданий существенно различаются. Учащиеся имели дело с арифметической или геометрической прогрессией, заданной рекуррентно, т.е. фактически своим определением. В первом случае учащемуся требовалось «перевести» на естественный язык символическую запись и просто последовательно вычислить четвертый или пятый член этой последовательности. Во втором случае задание было более сложным, так как требовалось проанализировать четыре утверждения о рассматриваемой последовательности. Приведем пример одного из вариантов такого задания.

Задание 4. Последовательность чисел задана условиями: $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 5$. Какое утверждение относительно этой последовательности **неверно**?

- 1) Все члены последовательности – положительные числа.
- 2) Эта последовательность – арифметическая прогрессия.
- 3) Число 25 является членом этой последовательности.
- 4) Каждый следующий член последовательности больше предыдущего.

Результаты по этому заданию оказались существенно выше, чем по первому. Разница объясняется, во-первых, особенностями регионов, в которых использовались соответствующие варианты, что следует из анализа общих результатов по группам территорий. Во-вторых, между этими заданиями имеется смысловое различие. В первом случае ничего не говорилось о том, что рассматриваемая последовательность является, например, геометрической прогрессией. А во втором среди приводимых утверждений содержался «намек» – утверждение о том, что данная последовательность является геометрической (арифметической) прогрессией. Как показывают результаты экзаменов, такое несущественное различие в значительной степени влияет на результативность выполнения задания, что говорит о недостаточной работе в ходе учебного процесса над основными, базовыми понятиями рассматриваемой темы.

Таблица 1.6. Элементы теории вероятностей и статистики

№	Содержание задания	Познавательная категория	Выполнили верно, %
1	Нахождение статистических характеристик ряда данных	практическое применение	73
2	Вычисление вероятности случайного события	решение задачи	69

Проверка усвоения материала вероятностно-статистической линии осуществлялась в 2011 г. в массовом порядке впервые и только на базовом уровне. В часть 1 работы было включено два задания (№ 17 и № 18), первое из которых относилось к статистике, второе – к теории вероятностей. Ниже приводятся примеры заданий.

Задание 17. Записана стоимость (в рублях) творожных сырков в магазинах микрорайона:
16, 27, 33, 14, 20.

Установите соответствие между статистическими характеристиками этого ряда и их значениями.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ	ЗНАЧЕНИЯ
А) Среднее арифметическое	1) 33
Б) Медиана	2) 22
В) Размах	3) 20
	4) 19

Задание 18. В финал соревнований вышли 6 спортсменов: 3 из Китая, 2 из России, один из США. Порядок выступающих определяется жеребьевкой. Какова вероятность того, что первым будет выступать спортсмен из России?

В связи с тем, что эта тема была включена в общие варианты впервые, интересна информация о выполнении данных заданий отдельными группами учащихся с различным уровнем математической подготовки (см. таблицу 1.7).

Таблица 1.7. Средний процент выполнения заданий вероятностно-статистической линии группами экзаменуемых с различным уровнем подготовки

Номер задания	Отметка			
	«2»	«3»	«4»	«5»
17	23%	60%	86%	92%
18	16%	52%	83%	93%

Отметим, что полученные результаты, как общие, так и по отдельным категориям учащихся, соотносятся с результатами, показанными по традиционным разделам курса математики, что говорит о преодолении психологического барьера, связанного с новизной материала, о реалистичности предъявляемых требований и хороших перспективах на продолжение начатой работы.

Анализ решаемости заданий по категориям познавательной деятельности показал, что наибольшую трудность для выпускников, как и всегда, составляет категория «*решение задачи*». В этой категории процент верного выполнения некоторых заданий опускается ниже 60%: составление буквенного выражения по геометрическому рисунку, составление уравнения по условию текстовой задачи. Наиболее благополучный результат в этом году получен по заданиям на *применение знаний в практической ситуации*, процент выполнения соответствующих заданий находится в диапазоне 73–80. В целом хорошие результаты получены по категории «*знание / понимание*». Выпускники показали хорошее владение эквивалентными представлениями чисел; способность распознавать понятия и требуемые объекты на основе определений, известных свойств, сформированных представлений; способность использовать символический, графический, вербальный языки и переходить от одного языка к другому; интерпретировать реальные зависимости, заданные графически. Только по одному заданию из этой категории (тема «Последовательности и прогрессии») получен результат ниже границы планируемых диапазонов трудности. По категории «*алгоритм*» трудность варьируется в зависимости от содержания заданий. Три группы заданий попали в разряд трудных (63–66%). Это задания на нахождение значения функции, заданной формулой, решение линейного неравенства и системы линейных неравенств.

Анализ решаемости заданий по форме ответа – выбор ответа или краткий ответ – показал, что в первом случае практически всегда присутствует ответ (верный или неверный), а во втором всегда есть учащиеся, не давшие никакого ответа, причем зачастую этот процент значителен. Однако результат, выражающийся в проценте верных ответов, не зависит от того, предлагаются ли учащимся ответы для выбора или требуется записать ответ самостоятельно.

Результаты выполнения заданий части 2 работы

Основное назначение части 2 экзаменационной работы – дифференцированная проверка владения учащимися алгебраическим материалом на повышенном и высоком уровнях. В соответствии с этой целью в части 2 представлены задания разных уровней: задание № 19 экзаменационной работы обозначено П1 (условно – первого повышенного уровня), задания № 20 и № 21 обозначены П2 (условно – второго повышенного уровня) и задания № 22 и № 23 – высокого уровня. Последние две задачи рассчитаны на учащихся, получивших более основательную подготовку, чем та, которая обеспечивается пятичасовым курсом.

Анализ результатов выполнения заданий части 2 отчетливо показал их зависимость от территории, в которой выполнялась работа (Европейская или Восточная часть РФ). Описание содержания заданий части 2 КИМ и результаты представлены для этих территорий по отдельности.

В табл. 1.8, приведенной ниже, описано содержание заданий части 2 работы, которая писалась в школах Европейской части РФ, и указан процент учащихся, выполнивших задание полностью или с небольшим недочетом.

Таблица 1.8. Результаты выполнения заданий части 2 в Европейской части РФ

№ задания	Содержание задания	Уровень задания	Количество баллов	Выполнили верно, %
19	Решение систем двух линейных уравнений с двумя переменными	П1	2	51
20	Сравнение числовых выражений, содержащих квадратные корни	П2	3	28
21	Решение задач по теме «Арифметическая прогрессия» с применением аппарата уравнений и неравенств	П2	3	24
22	Решение задач на координатной плоскости по теме «График квадратного трехчлена»	В	4	6
23	Решение текстовой задачи на концентрацию	В	4	17

Прежде всего, подчеркнем, что результаты выполнения всех заданий хорошо укладываются в заданный диапазон трудности; по заданиям № 19 и № 23 они близки к верхней границе. Кроме того, разброс результатов по всем заданиям весьма незначителен.

Больше половины учащихся продемонстрировали хорошее владение техникой преобразования уравнений в ходе выполнения задания № 19. Чуть меньше пятой части учащихся справились с традиционно трудной текстовой задачей на концентрацию, продемонстрировав хороший уровень логической подготовки, умение описать на языке алгебры ситуацию, встречающуюся на уроках химии. Около четверти учащихся справились с непростыми, хотя и достаточно стандартными, заданиями № 20 и № 21, продемонстрировав умение применять разнообразный алгебраический аппарат для ответа на поставленный вопрос.

Иная картина с выполнением задания № 22: с ним справились менее 7% школьников, показавших по другим заданиям достаточно высокие результаты. Это объясняется качественным отличием указанного задания от других. Оно не просто высокого уровня; основная его характеристика – нестандартность. Знания, требующиеся для выполнения этого задания, не выходят за рамки обязательного минимума; однако необходимо свободное владение всем их комплексом, умение перейти от алгебраических фактов к их геометрической трактовке и т.д. Школьники, справившиеся с этим заданием, безусловно, имеют очень высокий уровень математической подготовки и составляют потенциал профильных классов с углубленным изучением математики в старшей школе.

В табл. 1.9. представлены результаты выполнения экзаменационной работы в школах Урала и Восточной части РФ.

Таблица 1.9. Результаты выполнения заданий части 2 в школах Урала и Восточной части РФ

№ задания	Содержание задания	Уровень задания	Количество баллов	Выполнили верно, %
19	Сокращение алгебраической дроби	П1	2	34
20	Сравнение числового выражения, содержащего квадратные корни, и целого числа	П2	3	10
21	Решение задач на арифметическую прогрессию с применением аппарата неравенств	П2	3	9
22	Решение задач на координатной плоскости (составление уравнения параболы, проходящей через три заданные точки)	В	4	7

23	Решение текстовой задачи на проценты	В	4	8
----	--------------------------------------	---	---	---

Прежде всего, все результаты выполнения заданий части 2 экзамена не попадают в планируемый диапазон трудности. При этом разброс отклонений отдельных результатов от среднего значения весьма значителен. Следует отметить также близкие результаты по заданиям №20-23 (только по заданию № 22 они чуть ниже).

Таким образом, немногим более 30% школьников могут выполнить стандартные алгебраические преобразования, что, конечно, необходимо для изучения в старшей школе. Однако умение выполнять задания идейного характера подтвердило значительно меньше школьников, т.е. число тех, кто потенциально готов изучать математику на высоком уровне, невысок. Очень невысок процент тех, кто смог решить хотя и трудные, но вполне стандартные задачи № 20 и № 21.

2.1.5. Анализ выполнения заданий выпускниками с различным уровнем подготовки

Напомним, что в задачи экзамена в новой форме входит проверка сформированности у всех учащихся базовой математической подготовки, составляющей функциональную основу общего образования, и выявление учащихся, имеющих повышенный уровень подготовки, достаточной для изучения ее в старших классах на профильном уровне. Отметим в качестве достоинства экзаменационной работы ее хорошие дифференцирующие качества, которые проявляются в частях 1 и 2 работы, так и во второй. На рис. 1.2 хорошо видно, что уже по части 1 имеются различия, хотя и не столь существенные, между группами учащихся, получивших отметку «4» и отметку «5». Также видно, как неустойчива подготовка «троечников» и как глубоко лежит уровень незнания группы «двоечников».

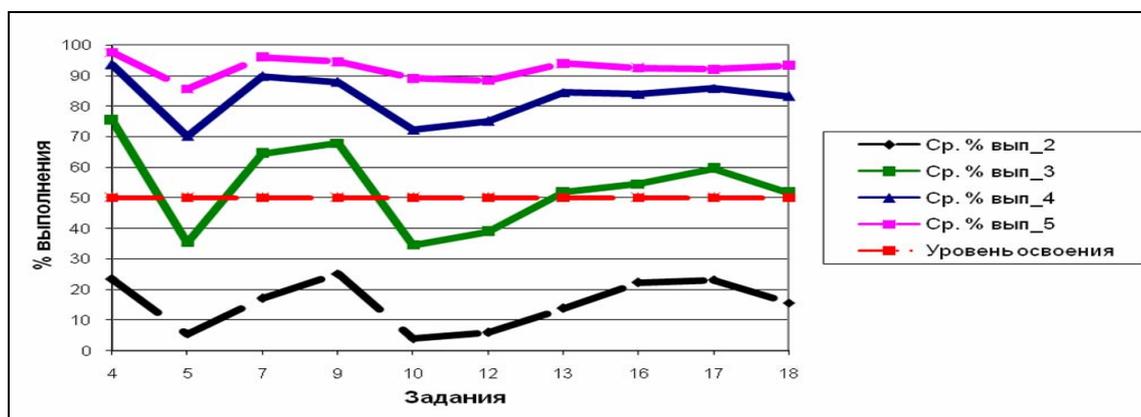


Рис. 1.2. Выполнение заданий части 1 выпускниками с различным уровнем подготовки

Отметим также и тот факт, что результаты выполнения заданий части 2 свидетельствуют о том, что эти задания решают задачу дифференциации наиболее подготовленных учащихся, имеющих отметку «4» или «5». Минимальный разрыв между средними процентами выполнения заданий по группе «пятерочников» и по группе «четверочников» – около 35%. Это видно на рис. 1.3.

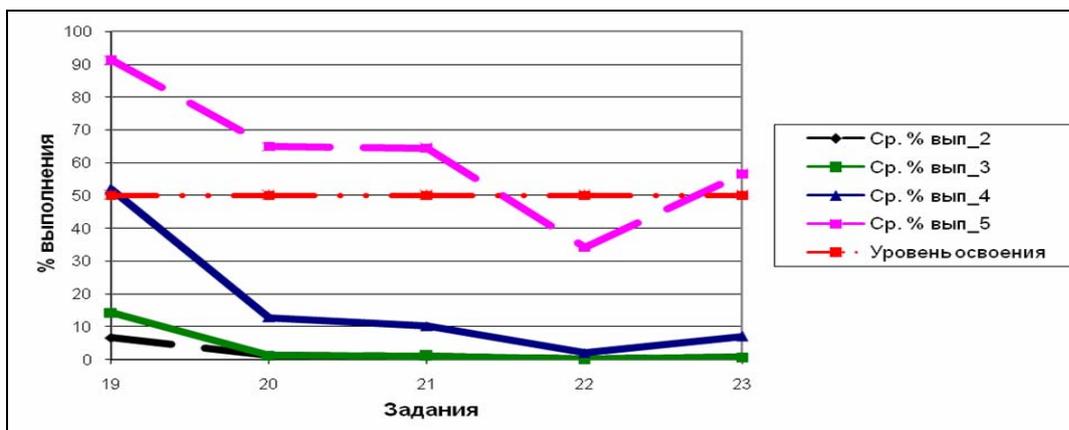


Рис. 1.3. Выполнение заданий части 2 выпускниками с различным уровнем подготовки

Для того чтобы выявить особенности математической подготовки учащихся каждой из выделенных групп, результаты по ним были обработаны отдельно.

Учащиеся, получившие отметку «5», в целом продемонстрировали очень хорошее владение материалом на уровне базовой подготовки. Результаты выполнения заданий части 1 экзаменационной работы находятся в диапазоне от 86 до 98%, при этом среднее значение составляет 94%. Процент выполнения заданий повышенного и высокого уровней (часть 2 экзаменационной работы), показанные этой группой учащихся, представлены в табл. 1.10.

Таблица 1.10

Номер задания	19	20	21	22	23
Процент выполнения	91	65	64	34	57

Выпускники, получившие отметку «5», подразделяются на три группы. Половина таких учащихся (11% от общего числа выпускников) имеют «минимальную пятерку» с рейтингом 22–25 баллов, чуть меньше (8%) имеют твердую «пятерку» с рейтингом от 26 до 31 баллов. И наконец, «пятерку» с очень высоким рейтингом – 32–34 балла – имеют 2,3% учащихся.

Учащиеся, получившие отметку «4», продемонстрировали стабильное владение материалом на уровне базовой подготовки. Результаты выполнения 15-ти заданий части 1 экзаменационной работы находятся в этой группе в диапазоне от 80 до 96%. Несколько ниже результаты показаны по заданиям на составление выражения для вычисления площади фигуры (70%), нахождение по готовому графику решений системы двух уравнений с двумя неизвестным (72%), решение системы двух линейных неравенств (75%). При этом среднее значение процента выполнения заданий части 1 – 86.

Процент выполнения заданий части 2 работы, показанный этой группой учащихся, представлен в табл. 1.11.

Таблица 1.11

Номер задания	19	20	21	22	23
Процент выполнения	52	13	10	2	7

Учителям следует обратить внимание на то, что первое, наиболее простое, задание части 2 выполняют лишь половина «четверочников», а второе и третье – чуть более 10%, что свидетельствует об определенном уровне сформированности формального алгебраического, логического аппарата, а также возможных пробелах в базовой подготовке, не позволяющих учащимся решать более сложные задачи. Это необходимо выявлять и учитывать на этапе подготовки к экзамену. Учащихся этой группы целесообразно нацеливать на безошибочное выполнение части 1. К сожалению, учителя часто переоценивают знания таких учеников и предлагают им задания неоправданно высокого уровня по сравнению с их реальной подготовкой. Например, не следует забывать, что последние два задания экзаменационной работы предназначены для

учащихся, имеющих уровень владения материалом, предъявляемым учащимся классов с углубленным изучением математики. Задания такого уровня – недостижимая планка для класса с 5–6 уроками математики в неделю. А 2% и 7% «четверочников», решивших, соответственно, задачи № 22 и № 23, – это, скорее всего, учащиеся не традиционных, общеобразовательных, а математических классов, имеющих значительные пробелы, в том числе, к сожалению, в базовой подготовке.

Как и в предыдущие годы, немного менее половины выпускников, получивших отметку «4» (13% от общего числа учащихся), имеют рейтинг 15–16 баллов. Это «минимальная четверка». В то же время можно выделить достаточно большую группу сильных «четверочников» (8% от общего числа учащихся), рейтинг которых составил 20–21 балл. Уровень их подготовки можно считать близким к «пятерке»: у них в полной мере сформированы базовые знания и умения, они способны находить пути решения задач в ситуациях, отличающихся от стандартных.

Учащиеся, получившие отметку «3», продемонстрировали нестабильное владение материалом на уровне базовой подготовки. Результаты выполнения основной части заданий в этой группе находятся в достаточно широком диапазоне: от 35% (решение системы уравнений по готовому графику) до 90% (оценка квадратного корня целыми числами), при этом среднее значение составляет 62%. Следует отметить серьезный отрыв результатов данной группы от предыдущей, а также тот факт, что для учащихся этой группы имеет серьезное значение форма ответа: задания с кратким ответом они выполняют приблизительно на 20% хуже заданий с выбором ответа. Особенность подготовки учащихся этой группы состоит в том, что они лучше освоили алгоритмическую составляющую курса, но имеют существенные пробелы в понятийной стороне. Возможно, отсюда и проблемы с категорией «решение задач», где нет четкого алгоритма выполнения, а известны лишь общие соображения, из которых учащимся должно быть самостоятельно «собрано» решение задачи.

Что касается части 2 работы, то учащиеся этой группы имели шанс справиться лишь с заданием № 19 – его выполнили 14% «троечников». Процент выполнения двух других заданий повышенного уровня едва превысил 1, что лишний раз доказывает, что, имея существенные пробелы в базовой подготовке, справиться с заданиями повышенной сложности просто невозможно.

Учащихся, набравших 12–14 баллов, можно отнести к категории «твердых троечников»: они выполняют не менее половины заданий части 1 работы, а некоторые из них и первое задание части 2. Таких учащихся около 16% от общего числа сдававших экзамен.

Учащиеся, получившие отметку «2», не продемонстрировали владение материалом на уровне базовой подготовки. Результаты выполнения заданий в этой группе находятся в широком диапазоне: от 4% до 60%, а значит, здесь есть и серьезные пробелы, и определенные возможности. Средний процент выполнения заданий части 1 равен 24, это на 36% меньше, чем по предыдущей группе. Надо отметить и тот факт, что результат этот стабилен уже на протяжении нескольких лет. Это означает, что методика работы со слабо успевающими учащимися учителями не найдена, а массированная подготовка к экзамену в стиле натаскивания, практикуемая в последние годы, результатов не дает.

Результаты проведенного анализа заставляют еще раз указать на необходимость дифференцированного подхода и в процессе обучения, и при подготовке к экзамену: учителю необходимо иметь реальные представления об уровне подготовки каждого учащегося и ставить перед ним ту цель, которую он может реализовать.

2.1.6. Выводы и рекомендации

Анализ результатов, проведенный в 2011 г., в совокупности с качественными и количественными результатами прошлых лет позволяет выявить некоторые проблемы в системе обучения арифметике и алгебре в основной школе. По всем содержательным блокам в отдельных регионах (из анализировавшейся выборки) выявились серьезные недостатки в подготовке учащихся. Многие выпускники продемонстрировали невладение важнейшими элементарными умениями, безусловно, являющимися опорными для дальнейшего изучения курса математики и смежных дисциплин. Это, прежде всего, элементарные действия с алгебраическими дробями, применение свойств степени с целым показателем; решение неравенств с одной переменной и их систем; перевод условия задачи на математический язык (составление выражения, уравнения); решение квадратных неравенств; работа с графиками реальных зависимостей.

При выполнении заданий первой части работы учащихся, как это наблюдалось и в предыдущие годы, в наибольшей степени затруднили задания категории «решение задач». При этом трудность была связана не с применением вычислительных алгоритмов, а с неумением разобраться в несложной фабуле. Также вызывают затруднения задания, в которых требуется интерпретировать условие, переходить с одного математического языка на другой (например, с графического на аналитический). Это, по всей видимости, связано с тем, что такого рода задания для итоговой аттестации являются качественно новыми, и нужные акценты в учебном процессе по разным причинам еще недостаточны.

Анализ решаемости заданий по категориям познавательной деятельности показал, что наибольшую трудность для выпускников IX класса, как и в предшествующие годы, составляет категория «решение задачи»: процент верного выполнения соответствующих заданий находится в диапазоне от 52% до 64%. По остальным категориям трудность варьируется в зависимости от содержания заданий. При этом еще раз подтверждаются выводы прошлых лет, связанные с владением учащимися базовыми алгоритмами. В противовес бытующему мнению результаты свидетельствуют о том, что владение основными, опорными алгоритмами также часто находится на уровне, ниже обязательного для продолжения изучения математики в старшем звене школы.

Включение в экзамен заданий по вероятностно-статистической линии курса математики основной школы для проверки усвоения соответствующего материала на базовом уровне в целом показало принципиальную возможность развития содержания экзамена в этом направлении. Увеличение первой части экзаменационной работы за счет двух дополнительных заданий из нового содержательного блока не потребовало существенного изменения условий проведения экзамена и кардинального пересмотра системы оценивания.

На основе проведенного анализа можно сделать некоторые общие рекомендации учителям, ведущим преподавание и подготовку к экзаменам. Следует обращать внимание на формирование в ходе обучения основ знаний и не форсировать продвижение вперед, пропуская или сворачивая этап введения новых понятий и методов. Важно для обеспечения понимания привлекать наглядные средства, например, координатную прямую при решении неравенств и систем неравенств, график квадратичной функции при решении квадратных неравенств. Важно постоянно обучать приемам самоконтроля. Например, при разложении многочлена на множители полезно приучить учащихся для проверки выполнить обратную операцию, при построении графика функции проконтролировать себя, опираясь на известные свойства графика. Иными словами, подготовка к экзамену осуществляется не в ходе массивного решения вариантов – аналогов экзаменационных работ, а в ходе всего учебного процесса, и состоит в формировании у учащихся некоторых общих учебных действий, способствующих более эффективному усвоению изучаемых вопросов. На этапе подготовки к экзамену работа с учащимися должна носить безусловно дифференцированный характер. Не надо навязывать слабому школьнику необходимость решения задач повышенного и тем более высокого уровня, лучше дать ему возможность проработать базовые знания и умения. Но точно также не надо без необходимости задер-

живать сильного ученика на решении заданий базового уровня. Учителю необходимо ставить перед каждым учащимся ту цель, которую он может реализовать в соответствии с уровнем его подготовки, при этом возможно опираться на самооценку и устремления каждого учащегося.

Ближайшей перспективой развития содержания и структуры государственной (итоговой) аттестации по математике в IX классе является проведение экзамена, включающего в себя вопросы всего курса: арифметики, алгебры, стохастики и геометрии. Это, естественно, приведет к некоторому пересмотру подходов к отбору содержания экзаменационной работы, ее структуры и условий проведения. При выработке стратегии подготовки к такому экзамену нужно, прежде всего, ориентироваться на содержание контроля. Для этого следует использовать представленные документы, определяющие структуру и содержание КИМ 2012 г. (демоверсия, спецификация, кодификаторы элементов содержания и требований). Помощь в подготовке к экзамену 2012 г. должен оказать и открытый банк экзаменационных заданий.